Minimización de Funciones Booleanas

Parque los Benavides
Cerralvo N.L.

Minimización de funciones Booleanas

¿Por qué minimizar funciones booleanas?

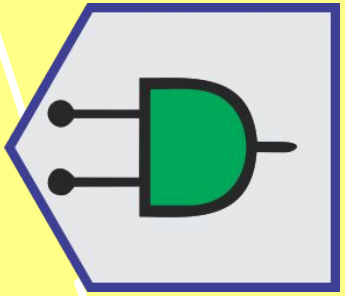
Cuando diseñamos circuitos digitales a partir de funciones booleanas, es común que la primera expresión obtenida no sea la más eficiente.

Minimizar una función booleana significa simplificarla sin cambiar su comportamiento lógico.

En otras palabras, buscamos una forma equivalente más sencilla, que realice exactamente lo mismo, pero usando menos recursos

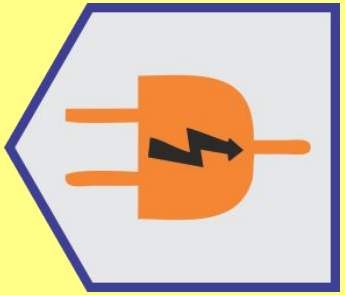
Beneficios

Menos compuertas



Menor Costo

Menos Consumo



Mayor Velocidad

Minimización de funciones Booleanas

Manipulación Algebraica

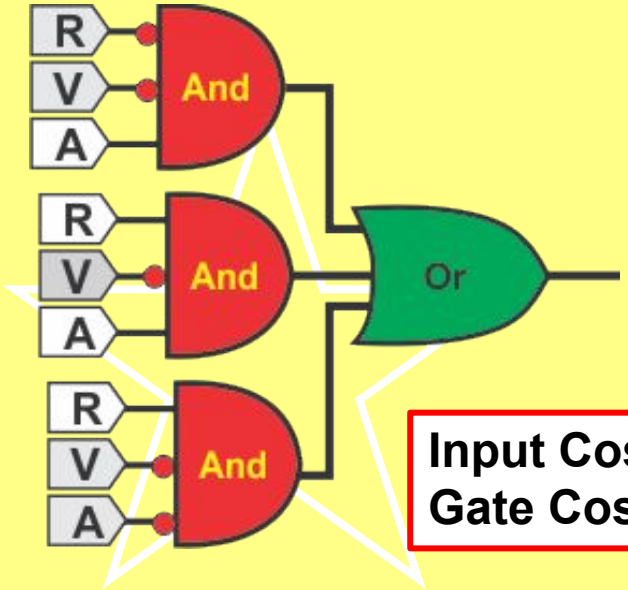
Mapas de Karnaugh

Software LogicAid

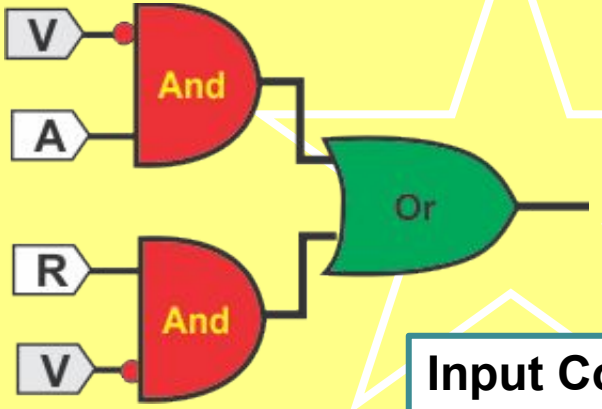
Manipulación Algebraica

Por medio de la manipulación algebraica se puede simplificar una Función Booleana y obtener su mínima expresión, para reducir así la complejidad del circuito a implementar

Una unidad de medida para comparar el tamaño del circuito puede estar determinada por la cantidad de entradas a todas las compuertas del circuito (Input Cost) y la cantidad de compuertas utilizadas en el circuito (Gate Cost)



Input Cost = 12
Gate Cost= 4



Input Cost = 6
Gate Cost = 3

Recursos de la Manipulación Algebraica

a) Identidades de los operadores.

b) Factorización

c) Factorización para la minimización.

d) Repitiendo un termino ya existente

e) Propiedad Distributiva.

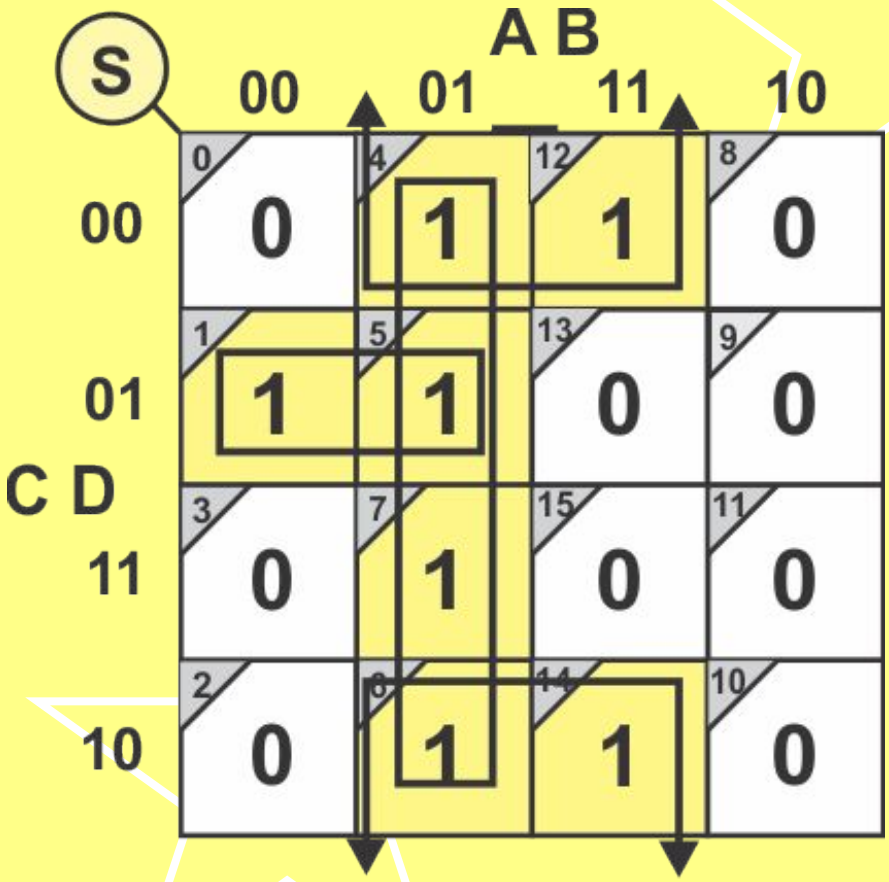
f) Teorema del Consenso.

g) Teorema de D´Morgan.

h) Las ocho formas estandard

i) Equiv. de Exor y Exnor en la forma AON (And, Or y Not).

Mapas de Karnaugh



$$S = A'B + B' + A'C'D$$

LogicAid

Simplifica funciones Booleanas:

1.- **Ecuaciones SOP o POS,**

2.- Términos Minitérminos o Maxiteriminos,

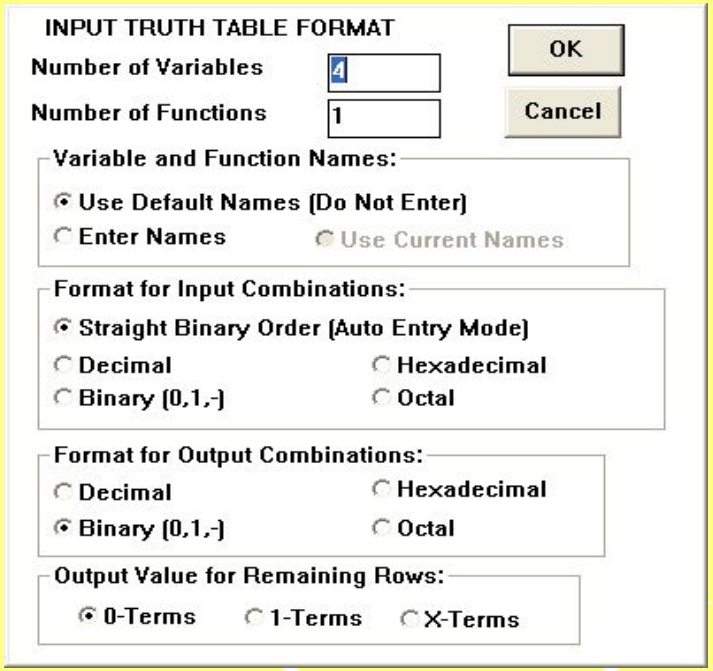
3.- Tablas de Verdad

Secuencial

Tabla de Estados,

Tutorial para el uso de Kmaps

Genera el archivo JED para programar un PLD.



Los resultados simplificados de los sistemas combinacionales en esta aplicación se pueden obtener en las formas **And/Or** y **Or/And.**

Disponible en http://jagarza.fime.uanl.mx/general/paginas/software.htm

Manipulación Algebraica

Identidades

Factorización

Duplicando un termino ya existente

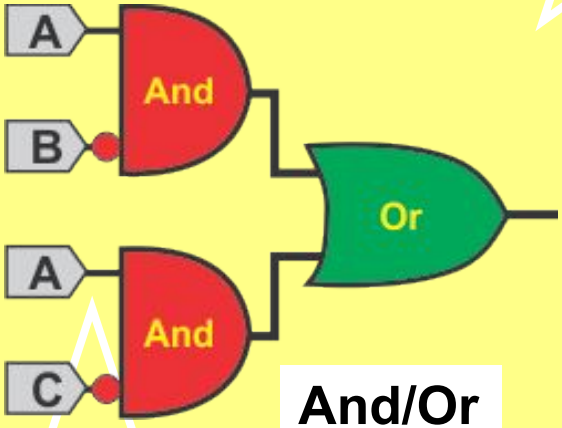
Teorema del consenso

Propiedad distributiva

Factorización

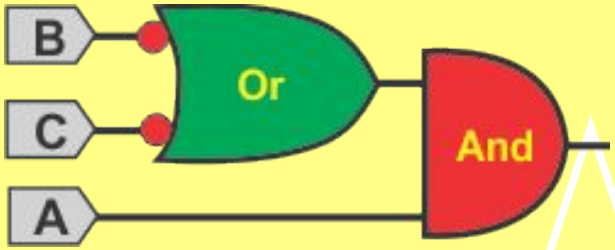
Manipulación Algebraica

$$AB' + AC' = A(B' + C')$$



And/Or

Input Cost=6
Gate Cost= 3



Or/And

Input Cost=4
Gate Cost= 2

Factorización para la minimización

Manipulación Algebraica

m	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

$$F = \bar{A}B + AB$$

$$F = B(\bar{A} + A)$$

Factor común B

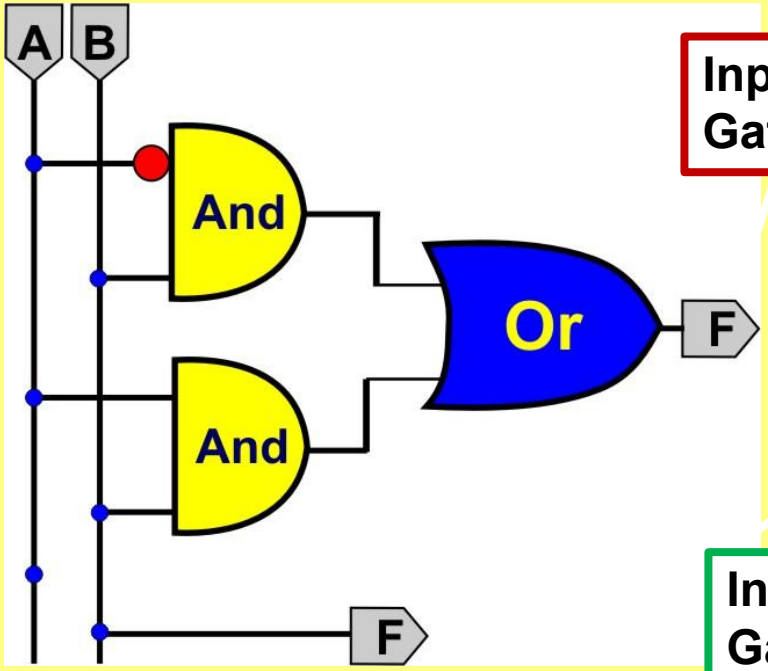
$$F = B(\bar{A} + A) = 1$$

$$F = B$$

Factorización para la Minimización

m	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

$$F(A,B)=\bar{A}B+AB = B$$

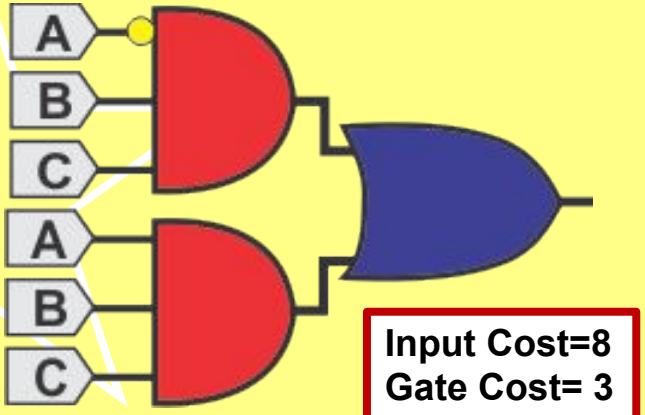


Input Cost=6
Gate Cost= 3

Input Cost=1
Gate Cost= 0

la Factorización *para la minimización* se efectúa cuando ***solo cambia una de las variables*** entre dos ***términos semejantes*** y esta variable se elimina

$$F = \bar{A}\,B\,C + A\,B\,C \Rightarrow F = B\,C$$



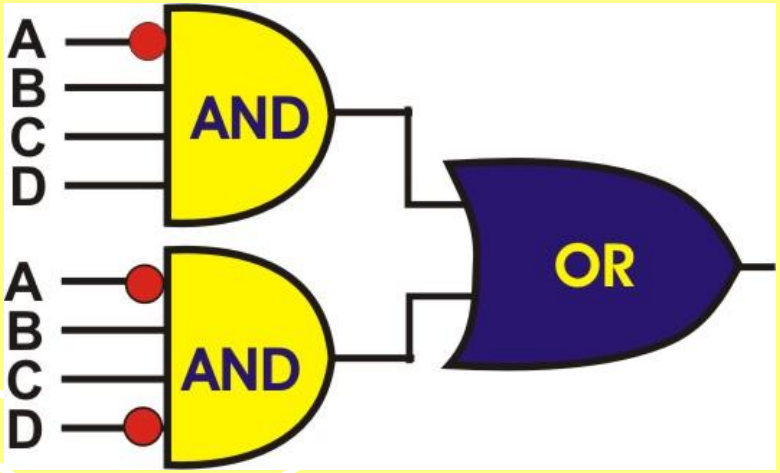
Input Cost=8
Gate Cost= 3

Input Cost=2
Gate Cost= 1

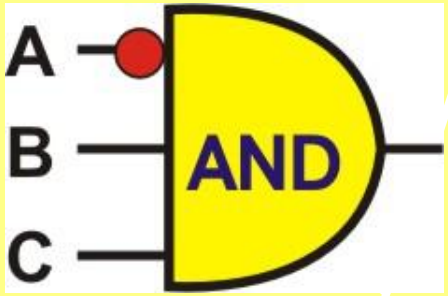
FIME UANL

$$F = \bar{A}\,B\,C\,D + \bar{A}\,B\,C\,\bar{D}$$

$$F = \bar{A}\,B\,C$$

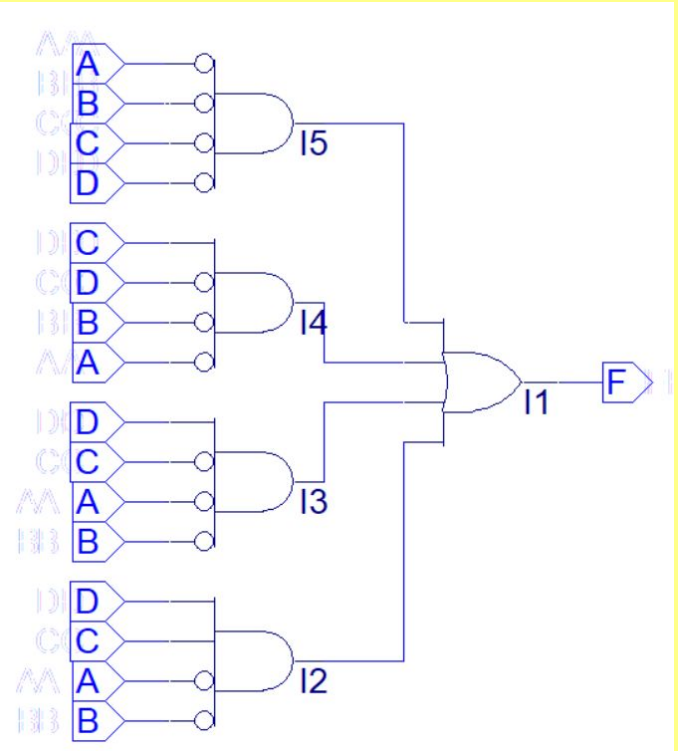


Input Cost=10
Gate Cost= 3



Input Cost=3
Gate Cost= 1

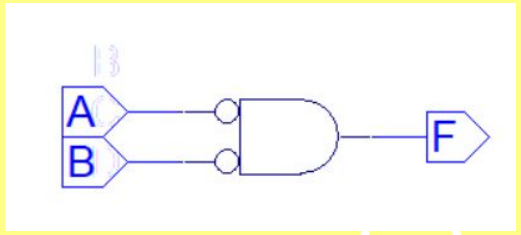
$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD$$



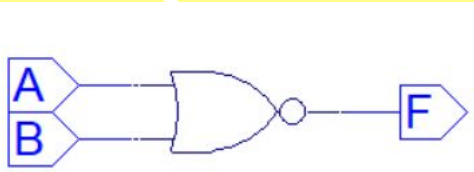
Input Cost=20
Gate Cost= 5

$$F = \bar{A}\bar{B}$$

Input Cost=2
Gate Cost= 1



$$(A + B)'$$




```
F=(!B & !A );
```

Input Cost=2
Gate Cost= 1

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$CS_{(S, P, E)} =$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S, P, E)} = S\ P'\ E'$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S,P,E)} = S\,P'\,E' + S\,P'\,E$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S, P, E)} = S\,P'\,E' + S\,P'\,E + S\,P\,E'$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S,P,E)} = S\,P'\,E' + S\,P'\,E + S\,P\,E' + S\,P\,E$$

$$CS_{(S, P, E)} = S\,P'\,E' + S\,P'\,E + S\,P\,E' + S\,P\,E$$

$$CS_{(S, P, E)} = S\,P'\,(E'+E) + S\,P\,(E'+E)$$

$$CS_{(S, P, E)} = S\,P' + S\,P$$

$$CS_{(S, P, E)} = S\,(P'+P)$$

$$CS_{(S, P, E)} = S$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S,)} = S$$

$$CS_{(S,P,E)} = S\,P'\,E' + S\,P'\,E + S\,P\,E' + S\,P\,E$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S,)} = S$$

$$CS_{(S,P,E)} = S\,P'\,E' + S\,P'\,E + S\,P\,E' + S\,P\,E = S$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CP_{(S, P, E)} = S' P E' + S' P E$$

$$CP_{(S, P, E)} = S' P (E'+E)$$

$$CP_{(S, P, E)} = S' P$$

$$CP_{(S, P)} = S' P$$

m	S	P	E	CS	CP	CE
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0

$$CS_{(S,P,E)} = S$$

$$CP_{(S,P,E)} = S' P$$

$$CE_{(S,P,E)} = S' P' E$$

Repitiendo un término ya existente

$$A + A = A$$

$$A + A + A = A$$

$$A = \bar{X}BC$$

$$F = \bar{X}BC + \bar{X}BC + \bar{X}BC = \underline{\bar{X}BC}$$

Repitiendo un termino ya existente

$$F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$$

$$F = \bar{A} + \bar{B}$$

$$F = (A\ B)'$$

FIME UANL

m	A	B	C	X
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

$$FX_{(A,B,C)} = A'\,B'\,C' + A'\,B'\,C + A'\,B\,C'$$

$$FX_{(A,B,C)} = A'\,B'\,C' + A'\,B'\,C + A'\,B\,C' + A'\,B'\,C'$$

$$FX_{(A,B,C)} = A'\,B' + A'\,C' \quad \text{SOP}$$

$$FX_{(A,B,C)} = A'\,(B' + C') \quad \text{POS}$$

M	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

$$S_{(A,B,C,D)} = \overset{0}{A'B'C'D'} + \overset{1}{A'B'C'D} + \overset{2}{A'B'CD'} + \overset{3}{A'B'CD}$$
$$+\overset{4}{A'BC'D'} + \overset{8}{AB'C'D'} + \overset{9}{AB'C'D} + \overset{12}{ABC'D'}$$

0-1 2-3 8-9 4-12

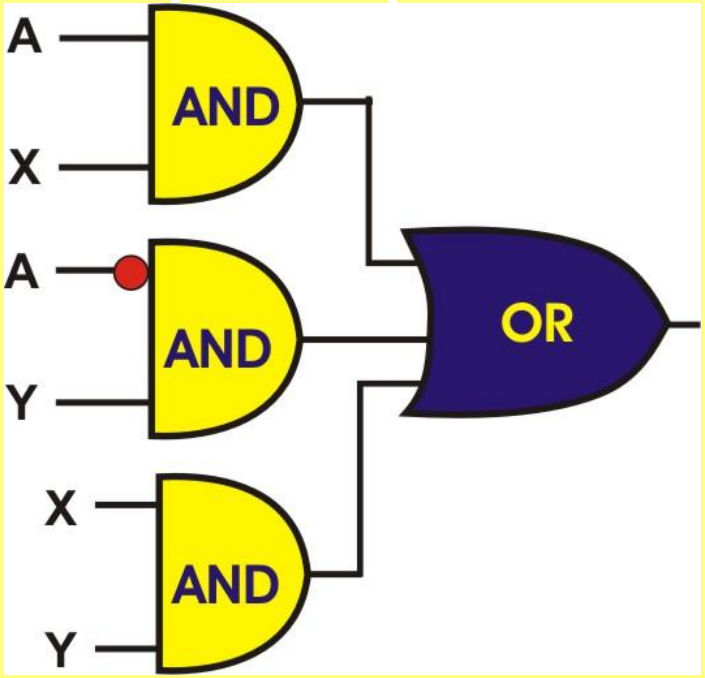
$$S_{(A,B,C,D)} = A'B'C' + A'B'C + AB'C' + 'BC'D'$$

$$S_{(A,B,C,D)} = \overset{0\text{-}1,\ 8\text{-}9}{B'C'} + \overset{0\text{-}1,\ 2,3}{A'B'} + 'BC'D'$$

$$S_{(A,B,C,D)} = A'B' + B'C' + C'D'$$

Teorema del consenso

$$F = AX + \bar{A}Y + XY$$



m. Acuerdo producido por consentimiento entre todos los miembros de un grupo o entre varios grupos.

FIME UANL

Teorema del consenso

$$F = AX + \bar{A}Y + XY$$

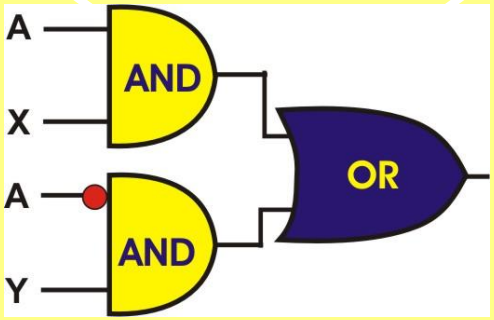
$$F = AX + \bar{A}Y + XY\,(A + \bar{A})$$

$$F = AX + \bar{A}Y + AXY + \bar{A}XY$$

$$F = AX + AXY + \bar{A}Y + \bar{A}XY$$

$$F = AX(1+Y) + \bar{A}Y(1+X)$$

$$F = AX + \bar{A}Y$$

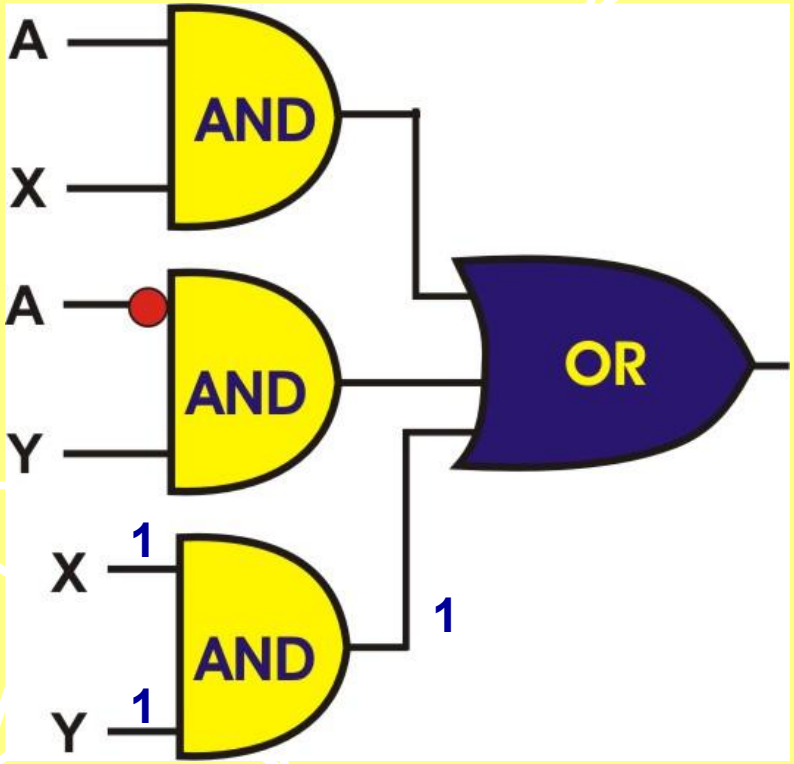


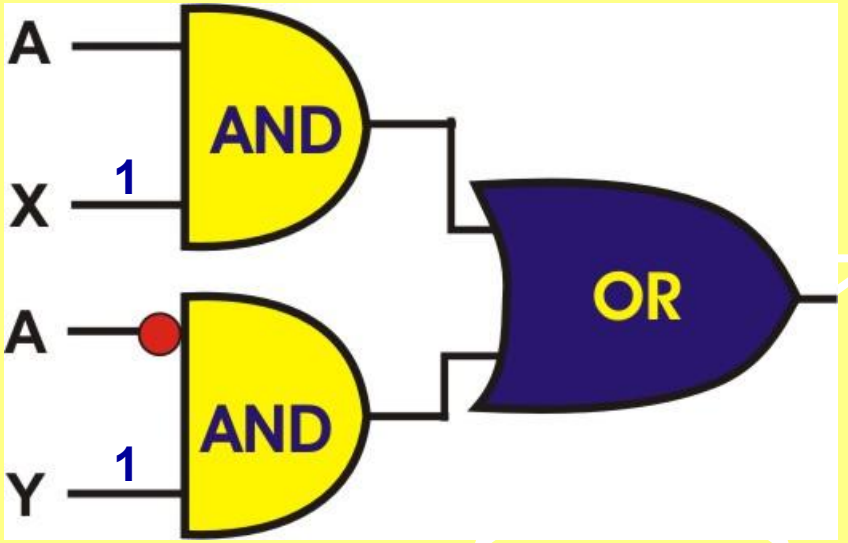
FIME UANL

Teorema del consenso

$F = AX + \bar{A}Y + XY$

$F = AX + \bar{A}Y$

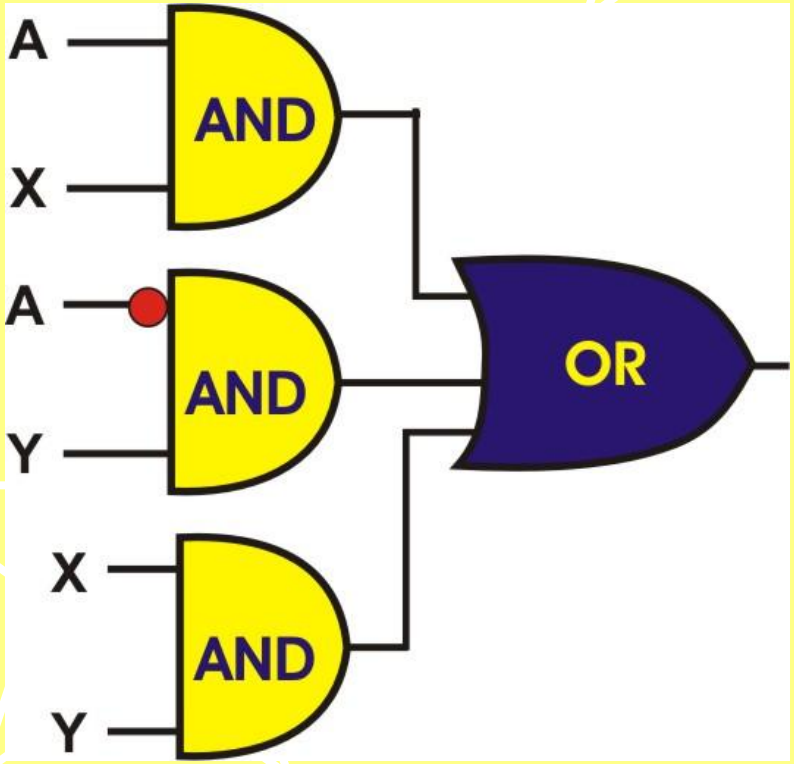


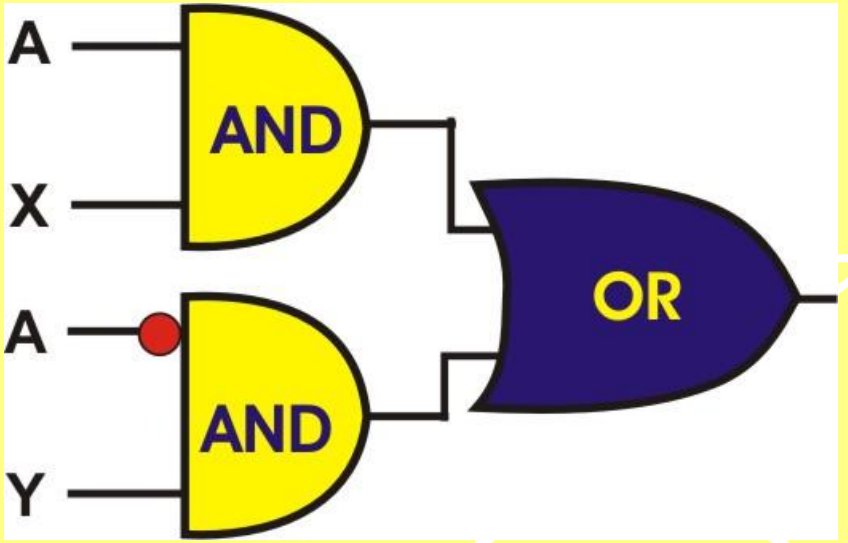


Teorema del consenso

$F = AX + \bar{A}Y + XY$

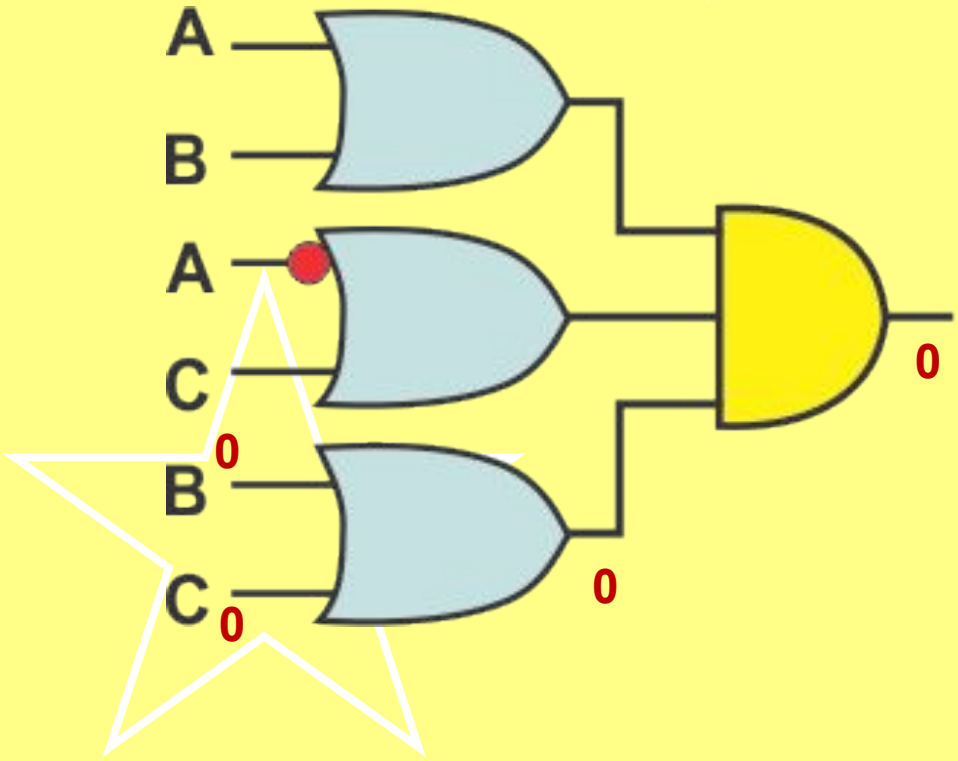
$F = AX + \bar{A}Y$

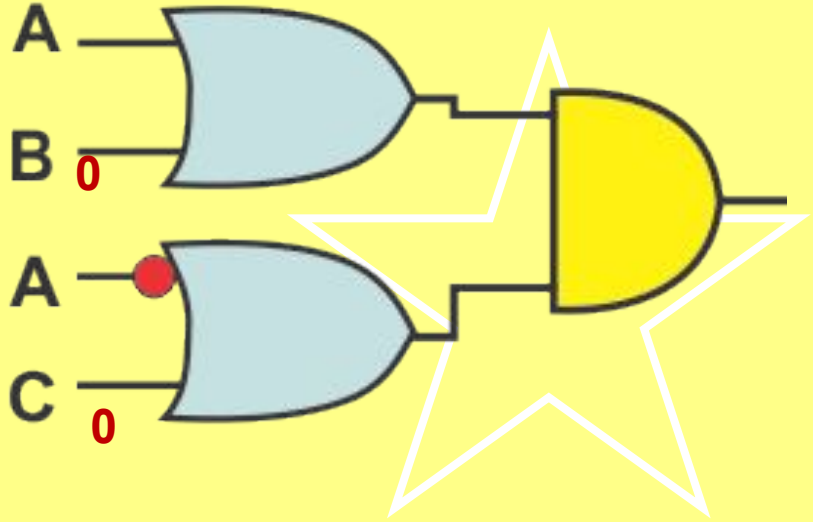




Teorema del consenso

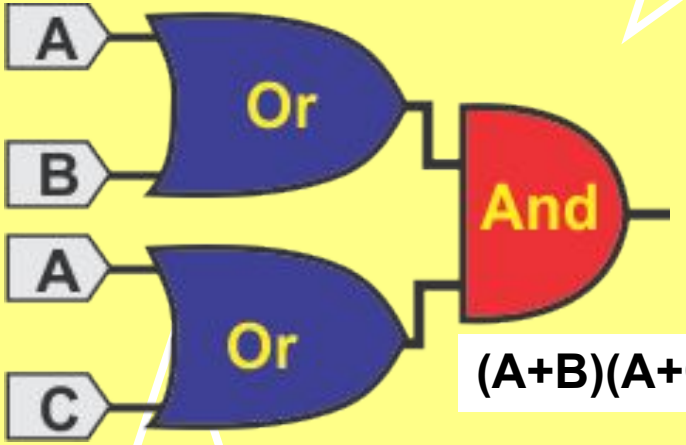
$$(A+B)(A'+C)(B+C)=(A+B)(A'+C)$$



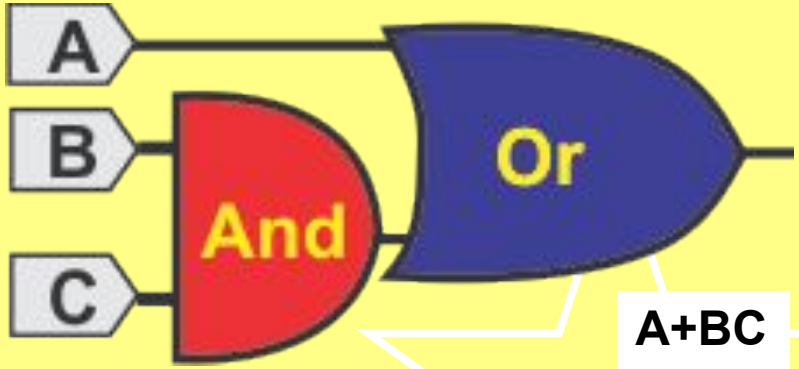


Propiedad Distributiva

$$F = (A+B)(A+C) = A+BC$$



(A+B)(A+C)

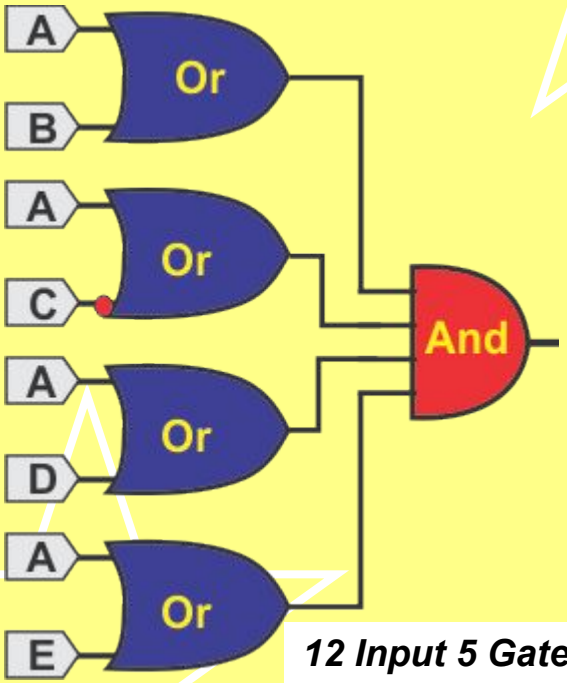


A+BC

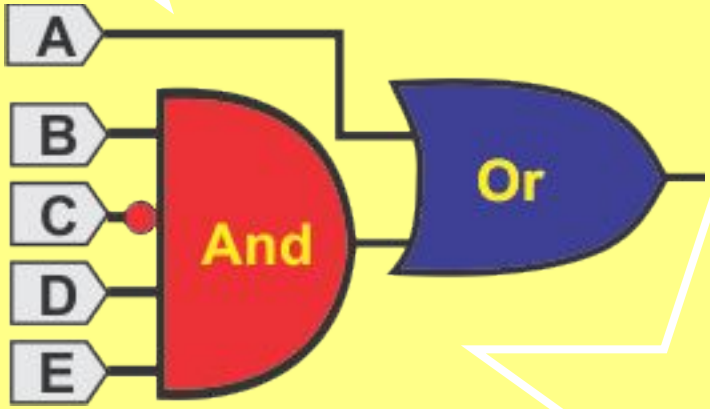
Propiedad Distributiva

$$F = (A+B)(A+C) = A+BC$$

$$F = (A+B)(A+\bar{C})(A+D)(A+E)$$



12 Input 5 Gates



6 Input 2 Gates

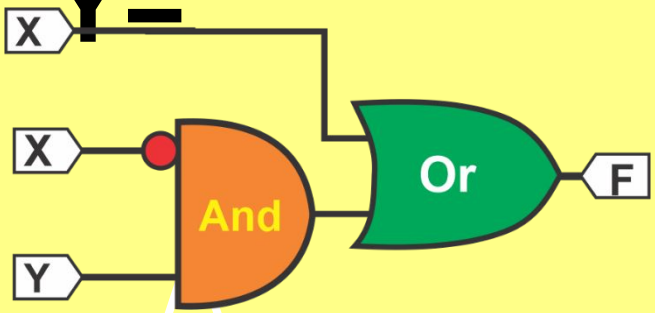
$$F = (A+B)(A+\bar{C})(A+D)(A+E) = A+B\bar{C}DE$$

FIME UANL

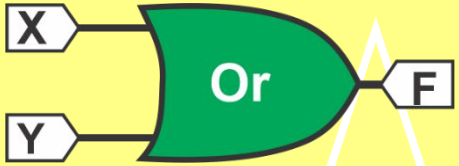
$$A + BC = (A+B)(A+C)$$

$X + X'$ | $(X + X')$ | $(X+Y)$

$Y=$



4 entradas, 2 Compuertas



2 entradas, 1 Compuerta

$(X+Y)$

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$$

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$$

$$F= B + A + A' C'$$

$$F= B + (A+ A')(A+ C')$$

$$F= B + A + C'$$

$$F= A + B + C'$$

Recursos para la minimización de funciones Booleanas

Manipulación Algebraica

1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A' =0	A+ A' =1

2.- Factorización

AB' + AB = A(B'+B)= A

3.- Propiedad Distributiva

X+YZ = (X+Y) (X+Z)

X (Y+Z) = XY +XZ

4.-Teorema del consenso

AB + A'C + BC = AB+A'C

(A+B) (A'+C) (B+C) = (A+B) (A'+C)

5.-Teorema de D Morgan

AB =(A'+B')' And por Nor

A+B =(A' B')' Or por Nand

(A+B)'=A' B' Nor por And

(AB)'=A'+ B' Nand por Or

Siempre negando las entradas

6.- Identidades Exor y Exnor

AB' + A'B = A⊕B

A'B'+AB = (A⊕B)'

Propósito

Tener menor cantidad de entradas y compuertas utilizadas en el circuito

1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A’ =0	A+A’ =1

2.- Factorización

AB’ + AB = A(B’+B)= A

3.- Propiedad Distributiva

X+YZ = (X+Y) (X+Z)

X (Y+Z) = XY +XZ

4.-Teorema del consenso

AB+A’C+BC = AB+A’C

5.-Teorema de Dmorgan

(AB)’=A’+ B’ (A+B)’=A’ B’

A+B =(A’ B’)’ AB =(A’+B’)’

1	**1+ B’+** C
2	D**C’**(0)
3	**A’+**B+A
4	A**+ A’** BC

1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A’ =0	A+A’ =1

2.- Factorización

$$AB' + AB = A(B'+B) = A$$

3.- Propiedad Distributiva

$$X+YZ = (X+Y)\,(X+Z)$$

$$X\,(Y+Z) = XY + XZ$$

4.-Teorema del consenso

$$AB+A'C+BC = AB+A'C$$

5.-Teorema de Dmorgan

$$(AB)' = A' + B' \qquad (A+B)' = A'\,B'$$

$$A+B = (A'\,B')' \qquad AB = (A'+B')'$$

$$F1_{(B,C)} = 1+B'+C$$

$$F1_{(B,C)} = 1$$

1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A’ =0	A+A’ =1

2.- Factorización

$AB' + AB = A(B'+B) = A$

3.- Propiedad Distributiva

$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$

$X(Y+Z) = XY + XZ$

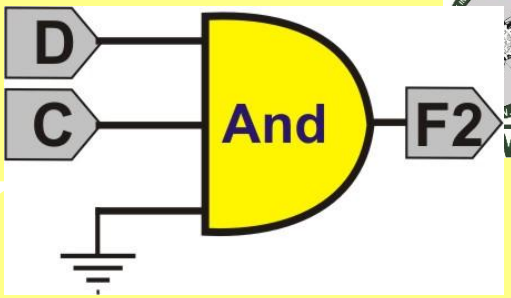
4.-Teorema del consenso

$AB+A'C+BC = AB+A'C$

5.-Teorema de Dmorgan

$(AB)' = A' + B' \quad (A+B)' = A' B'$

$A+B = (A' B')' \quad AB = (A'+B')'$



$F2_{(D,C)} = DC(0)$

$F2_{(D,C)} = 0$

1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A’ =0	A+A’ =1

2.- Factorización

$$AB' + AB = A(B'+B) = A$$

3.- Propiedad Distributiva

$$X+YZ = (X+Y)\,(X+Z)$$

$$X\,(Y+Z) = XY + XZ$$

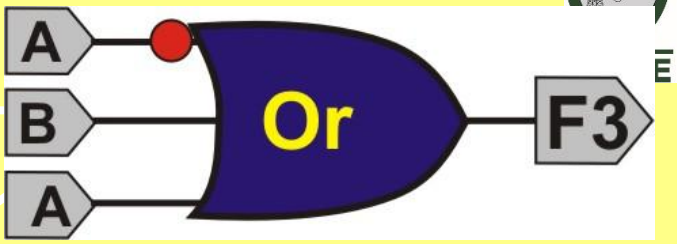
4.-Teorema del consenso

$$AB+A'C+BC = AB+A'C$$

5.-Teorema de Dmorgan

$$(AB)' = A' + B' \qquad (A+B)' = A'\,B'$$

$$A+B = (A'\,B')' \qquad AB = (A'+B')'$$



$$F3_{(A,\,B)} = A'+B+A$$

$$F3_{(A,\,B)} = 1$$

1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A' =0	A+A' =1

2.- Factorización

$AB' + AB = A(B'+B) = A$

3.- Propiedad Distributiva

$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$

$X(Y+Z) = XY + XZ$

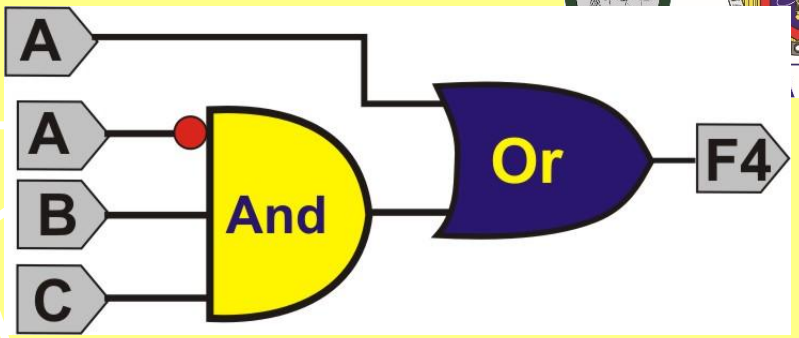
4.-Teorema del consenso

$AB+A'C+BC = AB+A'C$

5.-Teorema de Dmorgan

$(AB)'=A'+B' \quad (A+B)'=A'B'$

$A+B=(A'B')' \quad AB=(A'+B')'$

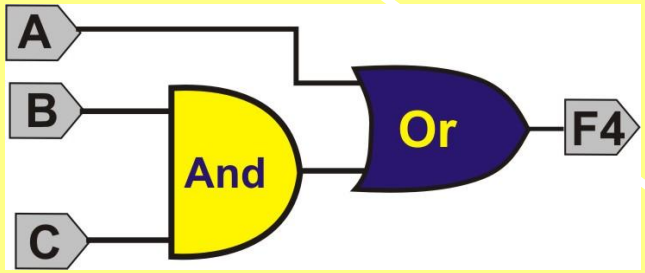


$F4_{(A,,B,C)} = A+A'BC$

$F4$

$(A+A'BC)$

$F4_{(A,,B,C)} = A+BC$



1.-Identidades

AND	OR
A A=A	A + A=A
A 0 =0	A + 0 = A
A 1 =A	A + 1 =1
A A’ =0	A+A’ =1

AB’ + AB = A(B’+B)= A

3.- Propiedad Distributiva

X+YZ = (X+Y) (X+Z)

X (Y+Z) = XY +XZ

4.-Teorema del consenso

AB+A’C+BC = AB+A’C

(A+B)(A’+C)(B+C) = (A+B)(A’+C)

5.-Teorema de Dmorgan

(AB)’=A’+ B’ (A+B)’=A’ B’

A+B =(A’ B’)’ AB =(A’+B’)’

5.- A (A + A’ B)

6.- $F_{(X,Y)}$ = XY (X+Y)

2.- Factorización

$AB' + AB = A(B'+B) = A$

3.- Propiedad Distributiva

$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$

$X(Y+Z) = XY + XZ$

4.-Teorema del consenso

$AB+A'C+BC = AB+A'C$

5.-Teorema de D Morgan

$(AB)' = A' + B' \quad (A+B)' = A' B'$

$A+B = (A' B')' \quad AB = (A'+B')'$

1.-Identidades	
AND	OR
$A \cdot A = A$	$A + A = A$
$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$
$A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$
$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$

6.- Exor y Exnor

$AB' + A'B = A \oplus B$

$A'B' + AB = (A \oplus B)'$

7	$A(A'+AB)$
8	$F_{(X, Y, Z)} = X' Y Z + X Y Z' + X Y Z$
9	$F_{(A, B, C)} = A' B C + A B C' + A B C + A' C$

2.- Factorización

$AB' + AB = A(B'+B) = A$

3.- Propiedad Distributiva

$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$

$X(Y+Z) = XY + XZ$

4.-Teorema del consenso

$AB+A'C+BC = AB+A'C$

5.-Teorema de D Morgan

$(AB)' = A' + B' \quad (A+B)' = A'B'$

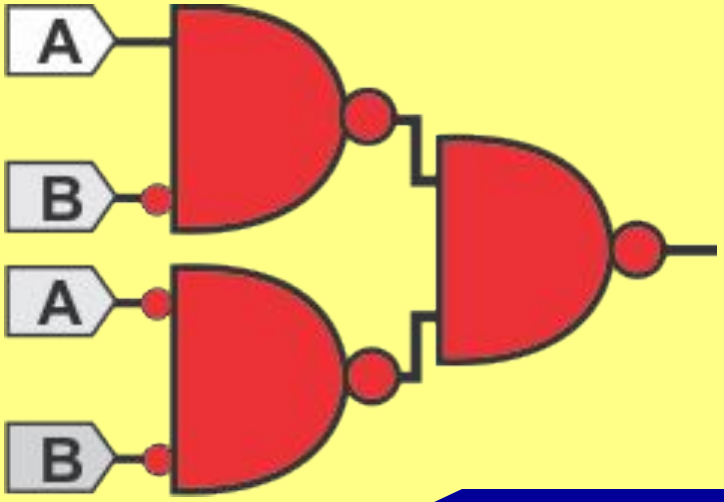
$A+B = (A'B')' \quad AB = (A'+B')'$

1.-Identidades	
AND	OR
$A \cdot A = A$	$A + A = A$
$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$
$A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$
$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$

6.- Exor y Exnor

$AB' + A'B = A \oplus B$

$A'B' + AB = (A \oplus B)'$



2.- Factorización

$AB' + AB = A(B'+B) = A$

3.- Propiedad Distributiva

$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$

$X(Y+Z) = XY + XZ$

4.-Teorema del consenso

$AB+A'C+BC = AB+A'C$

$(A+B)(A'+C)(B+C) = (A+B)(A'+C)$

5.-Teorema de D Morgan

$AB = (A'+B')'$ And por Nor

$A+B = (A'\ B')'$ Or por Nand

$(A+B)' = A'\ B'$ Nor por And

$(AB)' = A' + B'$ Nand por Or

1.-Identidades	
AND	OR
$A\ A=A$	$A + A=A$
$A\ 0=0$	$A + 0 = A$
$A\ 1=A$	$A + 1 =1$
$A\ A'=0$	$A+ A' =1$

6.- Exor y Exnor

$AB' + A'B = A \oplus B$

$A'B' + AB = (A \oplus B)'$

11	$F_{(A, B, C, D)} = A\ C\ D + B\ C + A\ C + A\ B'\ B$
12	$F_{(A, B, C)} = (A + A')(A\ B + A\ B\ C')$
13	$F_{(B, E, D, F)} = BD+B(D+E)+D'(D+F)$